

Теория упругих волн

Теплофизика наносистем (лекция 3)

Лю Шисян

lyu@bmstu.ru

Кафедра теплофизики (Э6)
МГТУ им. Н.Э. Баумана

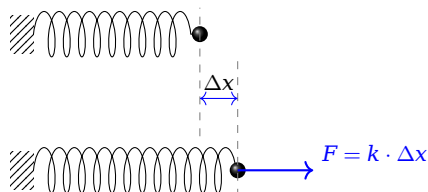


- 1 Поле смещений, деформация, напряжение
- 2 Упругие волны в кристаллах

Содержание

- 1 Поле смещений, деформация, напряжение
- 2 Упругие волны в кристаллах

Гармонический осциллятор и закон Гука



★ Уравнение движения:

$$F = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad (1)$$

★ Решение уравнения:

$$x(t) = A_0 \sin(\omega_0 t + \phi), \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

Континуумное приближение и поле смещений

- ★ Для описания **упругих свойств кристаллов** мы пренебрегаем микроскопической решёткой и рассматриваем материал как **сплошную среду** (*continuum*).
- ★ Такое приближение справедливо, лишь если длина волны упругих колебаний удовлетворяет условию

$$\lambda \gg a,$$

где a — межатомное расстояние.

Поле смещений

- ★ После возмущения упругого тела каждая точка \mathbf{r} отклоняется от положения равновесия. Вектор отклонения обозначается как $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и называется **полем смещений**.

$$\mathbf{r}' - \mathbf{r} = \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \begin{bmatrix} u_x(\mathbf{r}, t) \\ u_y(\mathbf{r}, t) \\ u_z(\mathbf{r}, t) \end{bmatrix} \quad (3)$$

Деформация (strain)

Рассмотрим две точки, расположенные в \mathbf{r} и $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$. Их расстояние — $\delta\mathbf{r}$. После деформации изменение вектора смещения между ними:

$$\delta\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \approx \delta\mathbf{r} \cdot \nabla\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{O}(\delta\mathbf{r}^2) \quad (4)$$

Игнорируя вторые порядки, записываем покомпонентно:

$$\delta u_i = \sum_{j=1}^3 \delta r_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (5)$$

Далее, разложим выражение на **симметричную** и **антисимметричную** части:

$$\delta u_i = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right] \delta r_j + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left[\frac{\partial u_i}{\partial r_j} - \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right] \delta r_j \quad (6)$$

Определим бестензорный симметричный тензор второго ранга ε , его компоненты:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial r_j} + \frac{\partial u_j}{\partial r_i} \right) = \varepsilon_{ji} \quad (7)$$

Деформация (strain)

★ **Тензор деформации** ε (характеризует относительную величину деформации: $\delta\mathbf{u}/\delta\mathbf{r}$):

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (9)$$

★ **В компактной форме:**

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left[\nabla\mathbf{u} + (\nabla\mathbf{u})^T \right] \quad (10)$$

Уравнение (10) устанавливает связь между полем смещений \mathbf{u} и тензором деформации ε .

Напряжение (stress)

★ **Напряжение** — это внутренняя сила на единицу площади, возникающая при внешнем воздействии.

★ В упругом теле напряжение описывается тензором второго ранга:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Сила на площадке ΔS с нормалью \mathbf{n} :

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \cdot \Delta S \quad \Rightarrow \quad F_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j \Delta S \quad (12)$$

В матричной форме:

$$\begin{bmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

Обобщённый закон Гука и тензора упругих модулей

★ Обобщённый закон Гука:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (14)$$

или в компонентной форме:

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (15)$$

Где \mathbf{C} — тензор четвёртого ранга, называемый *тензором упругих модулей* (elastic modulus tensor) или *тензором жёсткости* (stiffness tensor), содержит $3^4 = 81$ компонент, но только 21 из них — независимые (с учётом симметрий).

★ Симметрия тензора упругих модулей:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad \varepsilon_{kl} = \varepsilon_{lk} \Rightarrow C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (16)$$

Учитывая эти симметрии:

$$81 \Rightarrow 6 \times 3 = 54, \quad 54 \Rightarrow 6 \times 6 = 36 \quad (17)$$

Тензор упругих модулей

★ Уравнение (14) можно переписать в виде матричного произведения:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1131} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2231} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3331} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2331} & C_{2312} \\ C_{3111} & C_{3122} & C_{3133} & C_{3123} & C_{3131} & C_{3112} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1231} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (18)$$

★ Такая запись называется **формой Фойгта (Voigt)**. Коэффициент 2 у сдвиговых деформаций объясняется тем, что:

$$\sigma_{23} = \sum_{k,l} C_{23kl} \varepsilon_{kl} = \dots + C_{2323} \varepsilon_{23} + C_{2332} \varepsilon_{32} + \dots \quad (19)$$

★ Для краткости, часто используют обозначение:

$$C_{ijkl} \rightarrow C_{mn}, \quad \text{где:}$$

$$11 \rightarrow 1, \quad 22 \rightarrow 2, \quad 33 \rightarrow 3, \quad 23 \rightarrow 4, \quad 31 \rightarrow 5, \quad 12 \rightarrow 6$$

Модуль Юнга (Young's modulus)

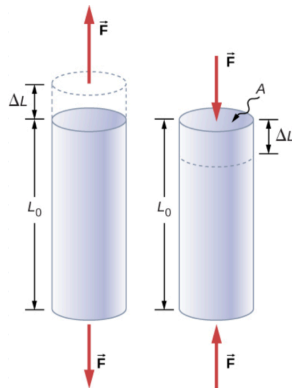
★ **Модуль Юнга** — это коэффициент, определяющий отношение между напряжением и деформацией в пределах **линейно-упругой деформации**, возникающей при **растяжении или сжатии**:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F_{\perp}/A}{\Delta L/L_0} = \frac{F_{\perp}L_0}{A\Delta L} \quad (20)$$

При сжатии $\varepsilon < 0$, поэтому обычно берётся модуль.

★ Единица измерения — Н/м² (Па). Для большинства твёрдых тел значения очень большие, поэтому используют **ГПа**.

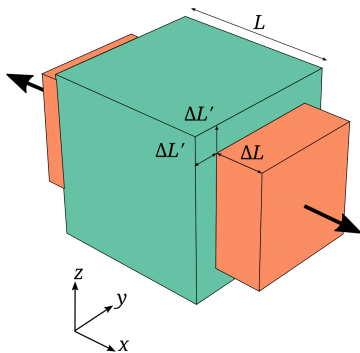
★ Значение модуля Юнга напрямую отражает **силу межатомного взаимодействия в кристалле**.



Коэффициент Пуассона (Poisson's ratio)

★ **Коэффициент Пуассона** ν — это величина, характеризующая **отношение поперечной деформации к продольной** при **одностороннем растяжении или сжатии**. Он отражает упругую реакцию материала в поперечном направлении.

$$\nu = -\frac{\varepsilon_T}{\varepsilon_L} \quad (21)$$



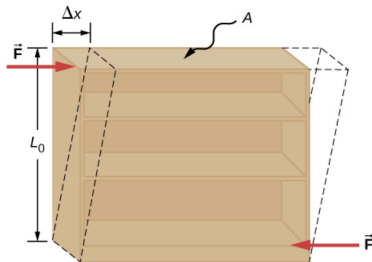
Модуль сдвига (shear modulus)

Если к упругому телу приложить силу вдоль поверхности F , то напряжение F/A называется **сдвиговым напряжением** (*shear stress*).

Тело при этом деформируется — угол сдвига $\alpha \approx \Delta x/L$ называется **сдвиговой деформацией** (*shear strain*).

Модуль сдвига (*shear modulus*) μ определяется как:

$$\mu = \frac{\text{shear stress}}{\text{shear strain}} = \frac{F/A}{\Delta x/L} \quad (22)$$



Модуль упругости при изотропии

★ Для **изотропного** (*isotropic*) упругого тела матрица жёсткости содержит только **2 независимых элемента**.
Матрицу из уравнения (18) можно записать в виде:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (23)$$

★ Связь элементов с модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и модулем сдвига μ :

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \lambda$$

μ = модуль сдвига, λ = параметр Ламе

Модуль упругости при кубической симметрии

★ Для **кубически симметричных** (*cubic*) кристаллов в тензоре упругости только **3 независимых компонента**.
Матрица из уравнения (16) принимает вид:

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (25)$$

★ Связь между компонентами тензора и макропараметрами E, ν, μ :

$$C_{11} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{12} = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad C_{44} = \mu$$

Также можно выразить ν как:

$$\nu = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}$$

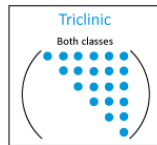
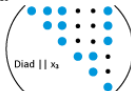
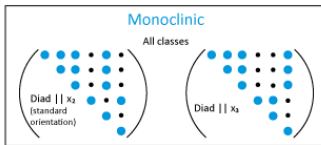
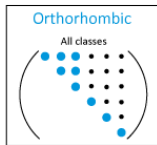
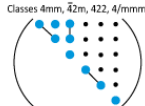
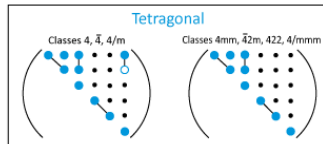
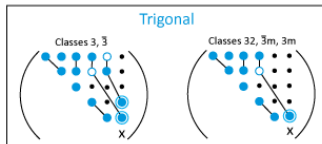
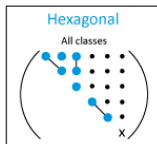
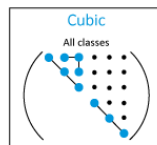
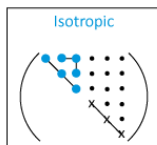
Модуль упругости при различной симметрии

Form of the (s_{ij}) and (c_{ij}) matrices

Key to notation

- zero component
- non-zero component
- equal components
- components numerically equal, but opposite in sign
- twice the numerical equal of the heavy dot component to which it is joined (for s)
- the numerical equal of the heavy dot component to which it is joined (for c)
- X $2(s_{11}-s_{12})$ (for s)
- X $\frac{1}{2}(c_{11}-c_{12})$ (for c)

All the matrices are symmetrical about the leading diagonal.



Уравнение движения упругого тела

Согласно **второму закону Ньютона** $m\vec{a} = \vec{F}$, имеем:

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int_V \mathbf{f}(\mathbf{r}, t) dV \quad (26)$$

Предположим, что **внешняя сила отсутствует**, то есть $\mathbf{f}(\mathbf{r}, t) = 0$. Применяя теорему Гаусса:

$$\oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (27)$$

Подставляя в (26), получаем:

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} dV = \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV \quad (28)$$

Поскольку равенство верно для любого объёма V , получаем **локальное уравнение движения**:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (29)$$

В компонентной форме:

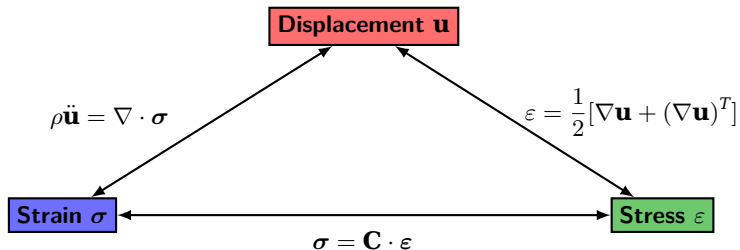
$$\rho \ddot{u}_i = [\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}]_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial r_j} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (30)$$

Содержание

- 1 Поле смещений, деформация, напряжение
- 2 Упругие волны в кристаллах

Уравнение волны в упругом теле

★ Связь между полями смещений, деформаций и напряжений можно представить следующей схемой:



★ **Уравнение волны в упругом теле:**

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \left\{ \mathbf{C} \left[\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right] \right\} \Rightarrow \rho \ddot{u}_i = \sum_{j,k,l=1}^3 C_{ijkl} \frac{\partial^2 u_k}{\partial r_j \partial r_l} \quad (31)$$

Уравнение волны в изотропной упругой среде

★ Уравнение волны в изотропной упругой среде:

$$\rho \ddot{\mathbf{u}}(\mathbf{r}, t) = (\lambda + \mu) \nabla [\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)] + \mu \nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \quad (32)$$

★ Выполним преобразование Фурье над $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{q} \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (33)$$

★ Подставим (33) в (32), получим:

$$\rho \omega^2 \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) = (\lambda + \mu) \mathbf{q} [\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)] + \mu q^2 \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) \quad (34)$$

Запишем в матричной форме:

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} \mu q^2 + (\lambda + \mu) q_x^2 & (\lambda + \mu) q_x q_y & (\lambda + \mu) q_x q_z \\ (\lambda + \mu) q_y q_x & \mu q^2 + (\lambda + \mu) q_y^2 & (\lambda + \mu) q_y q_z \\ (\lambda + \mu) q_z q_x & (\lambda + \mu) q_z q_y & \mu q^2 + (\lambda + \mu) q_z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix}$$

Таким образом, задача сводится к задаче на собственные значения:

$$\omega^2 \mathbf{U} = \mathbf{DU} \quad (35)$$

Поперечные и продольные волны

★ Для любого заданного волнового вектора \mathbf{q} , существует 3 собственных значения ω_i и соответствующие собственные векторы $\tilde{\mathbf{u}}_i$.

$$\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) = (\lambda + \mu) \mathbf{q}[\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)] + \mu q^2 \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)$$

★ **Продольная волна:** направление распространения \mathbf{q} и направление колебаний $\tilde{\mathbf{u}}$ **параллельны**. Предположим: $\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = q_z \tilde{u}_z$, тогда:

$$\begin{aligned} \rho\omega^2\tilde{u}_z &= (\lambda + \mu)q_z^2\tilde{u}_z + \mu q_z^2\tilde{u}_z \\ &= (\lambda + 2\mu)q_z^2\tilde{u}_z \\ \Rightarrow \omega &= \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} q_z \end{aligned} \quad (36)$$

Скорость распространения продольной волны:

$$v_L = \frac{\partial\omega}{\partial q} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad (37)$$

Поперечные и продольные волны

★ Для любого заданного волнового вектора \mathbf{q} , существует 3 собственных значения ω_i и соответствующие собственные векторы $\tilde{\mathbf{u}}_i$.

$$\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega) = (\lambda + \mu) \mathbf{q}[\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)] + \mu q^2 \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{q}, \omega)$$

★ **Поперечная волна:** направление распространения \mathbf{q} и направление колебаний $\tilde{\mathbf{u}}$ **перпендикулярны**, то есть $\mathbf{q} \cdot \tilde{\mathbf{u}} = 0$.

$$\rho\omega^2\tilde{\mathbf{u}} = \mu q^2\tilde{\mathbf{u}} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} q \quad (38)$$

Скорость распространения поперечной волны:

$$v_T = \frac{\partial\omega}{\partial q} = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (39)$$

Очевидно, скорость продольной волны выше, чем скорость поперечной волны:

$$\frac{v_L}{v_T} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} \quad (40)$$

Уравнение волны в упругом теле с кубической симметрией

★ На основе уравнения волны (31) и тензора упругости при кубической симметрии (25) получаем:

$$\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) \quad (41)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial z} \right) \quad (42)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = C_{11} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + C_{44} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + (C_{12} + C_{44}) \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial z} \right) \quad (43)$$

Аналогично выполним преобразование Фурье:

$$u_\alpha(\mathbf{r}, t) = \int d\omega \int d\mathbf{q} \tilde{u}_\alpha(\mathbf{q}, \omega) e^{i(\mathbf{q} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \quad (\alpha = x, y, z) \quad (44)$$

Получаем матричное собственное уравнение:

$$\omega^2 \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} C_{11}q_x^2 + C_{44}(q_y^2 + q_z^2) & (C_{12} + C_{44})q_xq_y & (C_{12} + C_{44})q_xq_z \\ (C_{12} + C_{44})q_xq_y & C_{11}q_y^2 + C_{44}(q_x^2 + q_z^2) & (C_{12} + C_{44})q_yq_z \\ (C_{12} + C_{44})q_xq_z & (C_{12} + C_{44})q_yq_z & C_{11}q_z^2 + C_{44}(q_x^2 + q_y^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_x \\ \tilde{u}_y \\ \tilde{u}_z \end{bmatrix} \quad (45)$$

Упругие волны вдоль направления $\langle 100 \rangle$

★ Предположим, что упругая волна распространяется вдоль направления $\langle 100 \rangle$, то есть $\mathbf{q} = q\mathbf{e}_x$. Тогда матрица в уравнении (45) принимает вид:

$$\frac{q^2}{\rho} \begin{bmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Очевидно, эта матрица имеет три собственных значения:

$$\omega_L = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} q \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\omega_{T_1} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} q \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\omega_{T_2} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} q \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Они соответствуют 1 продольной и 2 поперечным волнам.

Упругие волны вдоль направления $\langle 110 \rangle$

★ Предположим, что упругая волна распространяется вдоль направления $\langle 110 \rangle$, то есть $\mathbf{q} = \frac{\sqrt{2}}{2} q \mathbf{e}_x + \frac{\sqrt{2}}{2} q \mathbf{e}_y$, тогда матрица из уравнения (45) принимает вид:

$$\frac{q^2}{2\rho} \begin{bmatrix} C_{11} + C_{44} & C_{12} + C_{44} & 0 \\ C_{12} + C_{44} & C_{11} + C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 2C_{44} \end{bmatrix} \quad (49)$$

Очевидно, эта матрица имеет 3 собственных значения:

$$\omega_L = q \sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{2\rho}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$\omega_{T_1} = q \sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{2\rho}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$\omega_{T_2} = q \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \Rightarrow \tilde{\mathbf{u}}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Они соответствуют 1 продольной и 2 поперечным волнам.

Упругие модули и скорости распространения упругих волн

Параметр	Si	Ge	Al	Cu	Diamond
C_{11} [ГПа]	166.0	128.5	106.8	192.3	1076
C_{12} [ГПа]	63.9	48.3	60.7	163.1	125
C_{44} [ГПа]	79.6	68.0	28.2	42.0	576
ρ [кг/м ³]	2329	5323	2700	8960	3510
$\sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}}$ [м/с]	8442	4913	6289	4632	17508
$\sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}}$ [м/с]	5846	3574	3231	2165	12810
$\sqrt{\frac{C_{11} + C_{12} + 2C_{44}}{\rho}}$ [м/с]	12925	7665	9106	7002	25891
$\sqrt{\frac{C_{11} - C_{12}}{\rho}}$ [м/с]	6621	3881	4132	1805	16460